

점프 항을 포함하는 이자율 기간구조 모형의 채권 가격결정을 위한 수치적 분석 및 시뮬레이션[☆]

Numerical Analysis and Simulation for the Pricing of Bond on Term-Structure Interest Rate model with Jump

박 기 섭^{1*}
Kisoeb Park

요 약

본 논문에서는 점프 항을 포함하는 이자율 기간구조 모형의 채권 가격을 결정하기 위하여 이토의 보조정리(Ito's Lemma)를 적용하여 채권가격편미분방정식(Partial Differential Bond Price Equation; PDBPE)을 유도한다. PDBPE으로부터, 지수함수에 대한 매클로린 급수(Maclaurin series; MS)와 적분생성함수(moment-generating function; MGF)를 이용하여 채권 가격의 수치해(Numerical Solution; NS)를 구한다. 그리고 몬테 카르로 시뮬레이션(Monte Carlo Simulation; MCS) 기법을 이용하여 채권의 가격을 결정하기 위한 알고리즘을 제안하고, 시뮬레이션 과정을 통하여 채권의 가격을 결정한다. 수치적 분석을 이용한 채권 가격의 NS와 MCS를 이용하여 얻은 채권 가격의 결과를 비교하기 위하여, NS의 값과 MCS의 값의 비율인 상대오차(Relative Error; RE)를 구한다. 이로부터 얻은 RE가 약 2.2%보다 작음을 확인할 수 있고, 이것은 수치적 분석뿐만 아니라 제안한 알고리즘을 이용해도 채권의 가격을 매우 정확하게 예측할 수 있음을 의미한다. 또한, 지수함수에 대한 MS를 이용하여 얻은 채권 가격의 NS가 MGF를 적용하여 구한 채권 가격의 NS보다 상대적으로 오차가 작다는 것을 확인할 수 있다.

☞ 주제어 : 이자율 기간구조, 채권 가격, 몬테 카르로 시뮬레이션, 알고리즘

ABSTRACT

In this paper, we derive the Partial Differential Bond Price Equation (PDBPE) by using Ito's Lemma to determine the pricing of bond on term-structure of interest rate (TSIR) model with jump. From PDBPE, the Maclaurin series (MS) and the moment-generating function (MGF) for the exponential function are used to obtain a numerical solution (NS) of the bond prices. And an algorithm for determining bond prices using Monte Carlo Simulation (MCS) techniques is proposed, and the pricing of bond is determined through the simulation process. Comparing the results of the implementation of the above two pricing methods, the relative error (RE) is obtained, which means the ratio of NS and MCS. From the results, we can confirm that the RE is less than around 2.2%, which means that the pricing of bond can be predicted very accurately using the proposed algorithms as well as numerical analysis. Moreover, it was confirmed that the bond price obtained using the MS has a relatively smaller error than the pricing of bond obtained by using the MGF.

☞ keyword : Term-Structure Interest Rate, Bond Price, Monte Carlo Simulation, Algorithm

1. 서 론

다른 조건이 모두 일정할 때, 어떤 일정시점에서 만기까지의 기간과 채권수익률 사이의 관계를 이자율의 기간

구조(term-structure of interest rates; TSIR)이라고 한다. TSIR은 채권시장에서 투자성가를 평가하는데 중요한 투자지표로 사용되고, 정확한 TSIR를 파악함으로써 만기에 따라 달라지는 수익률 구조를 파악할 수 있다. 은행의 최대예상손실액(Value at Risk) 시스템구축, 채권의 가치평가, 채권투자의 성과평가, 자산-부채 관리, 이자율 예측, 이자율 관련 파생상품의 가격결정 등에 매우 중요한 정보를 제공한다[1]. 기존의 TSIR 모형에 대한 연구경향을 살펴보면, 이자율 변수는 확률 과정(stochastic process)이라고 불리는 시간상에서 값이 불확실하게 변하는 확산 과정(diffusion process)을 바탕으로 이루어져 있다. 즉, 물

¹ Dept. of IT Convergence Software, Seoul Theological University, Bucheon, 14754, Korea.

* Corresponding author (kisoeb@stu.ac.kr)

[Received 22 December 2023, Reviewed 27 December 2023(R2 8 February 2024), Accepted 18 February 2024]

☆ 이 논문은 2024년도 서울신학대학교 교내연구비 지원과 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임. (NRF-2021R1F1A1061873)

리학에서 공기중에 피어오르는 연기나 물 위를 떠다니는 꽃가루와 같은 불규칙한 운동을 묘사하는 데 주로 사용되며, 이자율 모형은 대부분 위너 과정(Wiener process)으로 표현되어지고 있다. 채권의 가격을 결정하는 다양한 방법에 대한 이자율에 대한 표준 모형을 얻기 위해 끊임 없는 연구가 진행되고 있고 그 기초가 되는 것이 TSIR이며, 채권투자에 있어서 모든 분석의 중요한 기초가 된다 [2]. TSIR을 파악함으로써, 채권의 만기 또는 잔존기간별로 채권 수익률을 측정할 수 있게 되어 만기별 채권의 가격형태 예상은 물론 채권 발행자의 채권발행을 통한 자금조달에 있어 적절한 판단기준을 제공할 수 있으며, 투자자들로 하여금 동일한 만기 또는 다양한 만기를 가진 채권들간의 수익률을 비교, 예측할 수 있게 함으로써 차익거래(arbitrage)[3, 4, 5, 6]를 통한 채권운용기회를 제공할 수 있다.

본 논문에서는 가장 합리적인 이자율 기간구조의 모형을 정하는데 유용한 정보를 제공하고자 한다. 균형모형(equilibrium model)[7, 8, 9]은 투자자의 예상에 의하여 채권수익율이 결정되므로, 미래의 단기이자율(short rate)이 상승한다면 이자율곡선은 위로 증가하는 형태로 나타나고, 미래의 단기이자율이 하락한다면 이자율곡선의 형태가 아래로 감소하는 형태로 나타난다. 만기까지의 기간이 긴 채권일수록 수익률의 상대적 안정성이 보다 크다. 이 모형에서는 순간적 단기 이자율(instantaneous short rate)을 유일한 변수로 간주하고, 이 변수의 움직임을 통해 채권의 가격을 구한다[10, 11]. 본 논문의 주요 목적은 단기 이자율에서의 균형모형에 점프 항을 추가시켜 점프-확산과정(jump-diffusion process)으로 모델링한 후에 지수함수에 대한 매클로린 급수(Maclaurin series; MS)의 정의와 적률생성함수(moment-generating function; MGF)를 적용하여 채권의 가격을 결정하고자 한다. 점프는 몇 가지 시장 현상에 의하여 나타나는데 정부의 화폐시장간섭 [12], 새로운 사건, 갑작스런 충격 요인, 외국거래시장의 쇼크[13] 등에 의하여 점프현상을 설명할 수 있다[14, 15, 16]. 이런 현상들을 기존의 이자율모형에 추가시켜 급격히 변화하는 시장현상을 설명하지 못하는 문제점을 보완한 모형이 점프-확산 모형(jump-diffusion model)이다. 이 모형에 이토의 보조정리(Ito's Lemma)를 적용하여 채권 가격편미분방정식(Partial Differential Bond Price Equation; PDBPE)을 유도한다. 유도된 PDBPE에 수치적 방법을 적용하여 채권 가격의 근사적인 해(Numerical Solution; NS)를 구하는 과정을 제시하고 보다 합리적인 이자율 기간구조의 표준모형을 정하는데 유용한 정보를 제공하고자

한다. 또한, 몬테 카르로 시뮬레이션(Monte Carlo Simulation; MCS)[17]을 이용하여 채권의 가격을 결정하기 위한 알고리즘을 제안한다. 수치적 분석을 이용한 채권 가격의 NS와 MCS를 이용하여 얻은 채권 가격의 결과를 비교하기 위하여, NS의 값과 MCS의 값의 비율인 상대오차(Relative Error; RE)를 구하고, 이때 얻은 RE로부터 NS와 MCS을 이용한 채권의 가격이 얼마나 정확하게 예측되었는지 판단할 수 있다.

본 논문에서는 단기이자율 모형의 기본적인 개념들을 소개하고, 채권 가격결정의 NS과 MCS을 이용하여 여러 가지 예정된 전개의 시뮬레이션으로 채권의 가격을 결정할 수 있는 구체적인 시뮬레이션 과정에 대한 알고리즘을 제시한다.

2. 점프-확산 이자율 모형

이자율의 미래 진로에 대한 불확실한 견해에서 이것을 확률변수와 같이 모델링하는 것은 자연스러운 일이며, 대부분 위너 과정으로 표현된다. 기술적으로 정확하게 이자율 r 이 될 수 있는 대로 짧은 예금에 의해 받는 이자율로 구체화시킬 수 있다[4]. 이런 이자율을 흔히 순간적 단기 이자율이라고 한다. 본 논문에서는 자산 가치에 대한 모델에서 대수적 랜덤워크(random walk)로 제안한 것과 같은 확산 과정에 점프현상을 추가하여 순간적 단기이자율 r 이 확률적 미분방정식(Stochastic Differential Equation; SDE)에 의해 지배받는다 가정하자. 이자율 r 상에서 Vasicek 점프-확산 모형(jump-diffusion model)은 다음과 같다[5].

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dW + JdN \quad (1)$$

여기서, a 는 평균회귀(mean reversion) 계수, b 는 장기간동안의 평균, σ 는 순간적인 변동성, t 는 시간, dW 는 독립적인 위너과정(Wiener process), J 는 점프크기로서, 평균이 μ 이고 분산이 γ^2 인 정규분포를 따르고, dN 는 집중도 h 인 푸아송과정(Poisson Process)이다. 짧은 기간 동안에 단 한번 점프가 발생할 확률은 $h dt$ 이다. 따라서 dN 는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$dN = \begin{cases} 0 & 1 - hdt & \text{점프가 없는 경우} \\ 1 & hdt & \text{그 외} \end{cases}$$

3. 채권가격편미분방정식

어떤 일정 시점에서 채권 만기까지의 기간과 채권 수익률 사이의 관계를 TSIR라 한다. 이자율 기간구조 모형은 만기가 서로 다른 만기수익률(yield-to-maturity)의 동태적 현상을 설명한다. 즉, 시점 t 에서 무이표채(zero-coupon bond)의 현재가치 $V(r,t,T)$ 는 이자율 r 과 시점 $T-t$ 에 관하여 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$V(r,t,T) = \exp[-A(t,T)r + B(t,T)] \quad (2)$$

채권의 가격을 결정하기 위한 편미분방정식(Partial Differential Equation; PDE)을 유도하기 전에 이토의 보조정리의 점프-확산 버전(jump-diffusion version)에 대해 알아보자. 확률변수 X 가 다음과 같은 SDE를 만족한다.

$$dX = u(x,t)dt + \omega(x,t)dW + v(x,t)dN$$

여기서, 함수 $F(x,t) \in C^2$ 일 때, 이토의 보조정리에 의하여 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$dF = [F_t(x,t) + F_x(x,t)u(x,t) + \frac{1}{2}tr(F_{xx}\omega(x,t)\omega(x,t)')dt + [F_x(x,t)\omega(x,t)]dW + [F(x+v(x,t),t) - F(x,t)]dN] \quad (3)$$

식 (1)과 식 (3)로 부터 무이표채의 변화율은 다음과 같은 식으로 표현 할 수 있다.

$$dV = [a(b-r)V_r + V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{rr}]dt + \sigma V_r dW + [V(r+J,t,T) - V(r,t,T)]dN \quad (4)$$

식 (4)의 기댓값(expected value)은 다음을 만족한다[6].

$$E[dV] = (rV + \lambda\sigma V_r)dt \quad (5)$$

만약 이자율 r 이 식 (1)을 만족하고, 식 (4)와 식 (5), $E[dN] = hdt$ 에 의하여 다음과 같은 PDBPE를 얻을 수 있다.

$$[a(b-r) - \lambda\sigma]V_r + V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{rr} - rV + hE[V(r+J,t,T) - V(r,t,T)] = 0 \quad (6)$$

식 (2)로부터 식 (6)의 기댓값부분을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & E[V(r+J,t,T) - V(r,t,T)] \\ &= E[\exp(-A(t,T)(r+J) + B(t,T)) - \exp(-A(t,T)r + B(t,T))] \\ &= V(r,t,T)E[(\exp(-A(t,T)J) - 1)] \end{aligned} \quad (7)$$

본 논문에서 식 (7)에서의 기댓값부분인을 두 가지 방법으로 표현하고자 한다.

첫 번째 방법으로, 지수함수에 대하여 MS*의 정의를 이용하고 점프크기 $J \sim N(\mu, \gamma^2)$ 인 정규분포를 따를 때 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} & E[(\exp(-A(t,T)J) - 1)] \\ & \approx E[-JA(t,T) + J^2A(t,T)^2/2] \\ & = -\mu A(t,T) + \frac{1}{2}(\gamma^2 + \mu^2)A(t,T)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

식 (6)은 식(7)과 (8)에 의하여 PDBPE로 표현하면 다음과 같다.

$$[a(b-r) - \lambda\sigma]V_r + V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{rr} - rV + hV[-\mu A + \frac{1}{2}(\gamma^2 + \mu^2)A^2] = 0 \quad (9)$$

식 (2)을 변수 t, r 에 관해 편미분한 식을 식 (9)에 대입을 하면 다음과 같은 A, B 상의 미분방정식을 유도해 낼 수 있다.

$$-\frac{\partial A}{\partial t} + aA - 1 = 0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial B}{\partial t} - abA + \lambda\sigma A + \frac{1}{2}\sigma^2 A^2 \\ & - h\mu A + \frac{1}{2}h(\mu^2 + \gamma^2)A^2 = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, 경계조건 $V(r, T, T) = 1$ 을 만족하기 위해서는 $A(T, T) = B(T, T) = 0$ 이란 조건이 필요하다.

미분방정식 (10)과 (11)에 대하여 선형미분방정식의 해법과 변수분리법을 적용하여 방정식을 풀면 다음과 같은 해를 구할 수 있다.

* 매클로린 급수 $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$ 이다.

$$A(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a};$$

$$B(t, T) = -\frac{E}{4a^3}e^{-2a(T-t)} + \frac{(aD+E)}{a^2}e^{-(T-t)} + \frac{(2aD+E)}{2a^3} - C.$$

여기서, $C = D/a^2 + 3E/4a^3$, $D = \lambda\sigma - ab - \mu h$ 이고, $E = \sigma^2 + (\gamma^2 + \mu^2)h$ 이다.

두 번째 방법으로, 지수함수에 대하여 MGF*를 이용하고 점프크기 $J \sim N(\mu, \gamma^2)$ 인 정규분포를 따를 때 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$E[\exp(-A(t, T)J)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi}} \exp[-A(t, T)J - \frac{(J-\mu)^2}{2\gamma^2}] dJ$$

$$= \exp[-\mu A + \frac{1}{2}\gamma^2 A^2]$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{(J-\mu+\gamma^2 A)^2}{2\gamma^2}] dJ$$

$$= \exp[-\mu A + \frac{1}{2}\gamma^2 A^2] \quad (12)$$

식 (6)은 식(7)과 (12)에 의하여 DBPE로 표현하면 다음과 같다.

$$[a(b-r) - \lambda\sigma]V_r + V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{rr} - rV + hV(\exp[-\mu A + \frac{1}{2}\gamma^2 A^2] - 1) = 0 \quad (13)$$

식 (2)을 변수 t, r 에 관해 편미분한 식을 식 (13)에 대입을 하면 다음과 같은 A, B 상의 미분방정식을 유도해 낼 수 있다.

$$-\frac{\partial A}{\partial t} + aA - 1 = 0 \quad (14)$$

$$B(t, T) = \int_t^T \left\{ (\lambda\sigma - ab)A + \frac{1}{2}\sigma^2 A^2 + h(\exp[-\mu A + \frac{1}{2}\gamma^2 A^2] - 1) \right\} = 0 \quad (15)$$

여기서, 경계조건 $V(r, T, T) = 1$ 을 만족하기 위해서는 $A(T, T) = B(T, T) = 0$ 이란 조건이 필요하다.

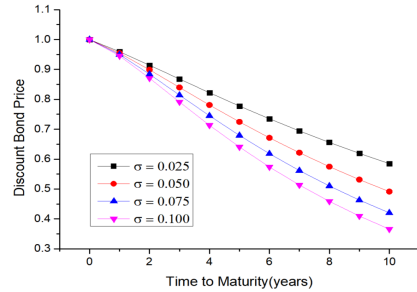
미분방정식 (14)는 식 (10)과 같은 선형미분방정식 해법으로 해를 구할 수 있으나 식 (15)은 수치적 방법을 적용하면 다음과 같이 근사적인 해로 표현할 수 있다.

$$A(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a};$$

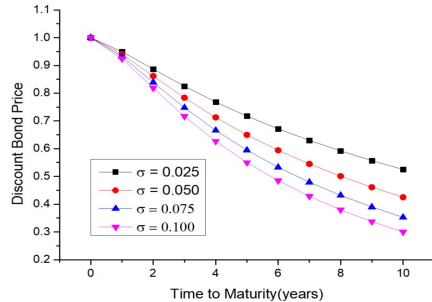
$$B(t, T) = N \left[\int_t^T \left\{ (\lambda\sigma - ab)A + \frac{1}{2}\sigma^2 A^2 + h(\exp[-\mu A + \frac{1}{2}\gamma^2 A^2] - 1) \right\} d\tau \right]$$

여기서, $N[\cdot]$ 는 수치적 방법에 의해 구한 근사해이다. 이제, 앞에서 제시한 두 가지 수치적 방법에 대하여 만기 시점(time to maturity)이 T 인 할인채 가격(discount bond price)의 NS를 그래프로 표현해 보자.

예를 들어 모수(parameter)의 값 $r = 0.0364$, $a = 0.500$, $b = 0.0358$, $\lambda = -0.5$, $\gamma = 0.01$, $\mu = 0$, $h = 10$, $t = 0$, $T = 1, \dots, 10$ 로 가정하면 다음 그래프와 같은 결과를 얻을 수 있다.



(a) Maclaurin Series



(b) Moment Generating Function

(그림 1) 할인채 가격

(Figure 1) Discount Bond Price

* 적률 생성함수 $E[\exp(tX)] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tx) f(x) dx$ 이다.

그림 1에서, 채권 가격과 만기와의 관계를 곡선으로 표현하였다. 변동성 σ 가 증가함에 따라 무이표채의 현재 가치 $V(r, t, T)$ 의 그래프가 감소됨을 확인할 수 있었고, 만기 시점 T 가 길어짐에 따라 무이표채의 현재가치가 낮아짐을 알 수 있었다. 이 곡선의 기울기가 음이라는 것은 무이표채의 현재가치와 만기는 역관계를 갖는다는 것이고, 곡선의 기울기가 급격하다는 것은 채권 가격 대비 만기의 민감도가 크다는 것을 의미한다.

4. MCS 기법을 이용한 채권가격결정을 위한 알고리즘

이 절에서는 MCS 기법을 이용하여 채권의 가격을 결정하기 위한 알고리즘을 제안한다. 이제 MCS의 알고리즘에 대해 알아보자. MCS은 랜덤 샘플링을 기초로 한 수치 적분으로 표현할 수 있고, MCS을 이용하여 채권 가격을 결정할 수 있다. 채권 가격 결정에 대한 구체적인 시물레이션 과정은 다음과 같다.

- ① 구간 $[t, T]$ 을 m 개로 나눈 각 구간 Δt 에 대하여, 식 (1)을 이산적으로 다음과 같이 나타낸다.

$$r_j = r_{j-1} + a(b - r_{j-1})\Delta t + \sigma\epsilon_j\sqrt{\Delta t} + J_jN_{\Delta t} \quad (16)$$

여기서 $j = 1, 2, \dots, m$ 이고, $\epsilon_j \sim N(0, 1)$ 인 표준정규분포를 따르고, 점프크기인 $J_j \sim N(\mu, \gamma^2)$ 인 정규분포를 따르며, $N_{\Delta t} \sim P(h\Delta t)$ 인 푸아송분포를 따른다.

- ② 식 (16)과 n 개의 단기이자율의 샘플링을 통하여 할인채 가격을 다음식으로부터 얻는다.

$$V(r, t, T) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp\left(-\sum_{j=0}^{m-1} r_{ij}\Delta t\right) \quad (17)$$

여기서 r_{ij} 는 $t + i\Delta t$ 에서 j 번째 시나리오에 대한 단기이자율의 가치이다.

- ③ MCS의 비편향추정량이 얼마나 정확하게 결정되었는지를 나타내는 추정량의 정도를 의미하는 측도로서 표준오차(standard error; SE)를 다음과 같이 정의한다.

$$SE = \frac{S}{\sqrt{n}} \quad \text{또는} \quad n = \frac{S^2}{SE^2}$$

여기서 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left[\exp\left(-\sum_{j=0}^{m-1} r_{ij}\Delta t\right) - V(r, t, T) \right]^2$

이고, 채권 가격의 비편향분산(unbiased variance) 추정값으로써 단기이자율의 n 샘플 경로로부터 얻는다.

- ④ 채권 가격의 95% 오차한계(limit of error; LOE)를 다음과 같이 정의한다.

$$LOE(\%) = 1.96 \times SE \times 100 \quad (18)$$

식 (18)에서 LOE의 값이 작을수록 MCS의 비편향추정량이 정확하게 결정되었음을 의미한다.

- ⑤ 시물레이션을 n 번 시행한다.

예를 들어 시간구간 1년에 대하여 $m = 365$, $n = 1000$, $\Delta t = (T - t)/m$, $t = 0$ 과 $T = 1$ 로 하고, 앞에서 제시한 알고리즘으로부터 가정한 모수의 값을 이용하여 MCS을 시행하면 Table 1과 같은 결과를 얻는다.

또 수치적 방법을 적용하여 구한 채권 가격의 NS와 MCS을 이용하여 얻은 채권 가격의 결과를 비교하기 위하여, NS의 값과 MCS의 값의 비율인 다음과 같이 정의되는 상대오차(Relative Error; RE)를 이용할 수 있다.

$$RE(\%) = \frac{|NS - MCS|}{NS} \times 100$$

(표 1) MCS를 이용한 채권가격($\sigma = 0.100$)
(Table 1) Bond Price using MCS($\sigma = 0.100$)

	Maclaurin Series	Moment Generating Function
NS	0.945258	0.924343
MCS	0.94466	0.94466
NS-MCS	0.00205767	0.020317
LOE(%)	0.306	0.306
RE(%)	0.063	2.198

표 1로부터 MCS을 통해서 얻은 채권 가격의 LOE의 값이 상당히 작다는 것을 알 수 있으며, 이는 매우 정확하게 채권 가격이 결정되었음을 입증한다. 또 RE가 각각 약 0.063%와 2.198%가 됨을 확인할 수 있는데, 이것은 수치적 분석뿐만 아니라 제안한 알고리즘을 이용해도 채권의 가격을 매우 정확하게 예측할 수 있음을 의미한다.

또한, 지수함수에 대한 MS를 이용하여 얻은 채권 가격의 NS가 MGF를 적용하여 구한 채권 가격의 NS보다

상대적으로 오차가 작다는 것을 확인할 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 점프 항을 포함하는 이자율의 기간구조 모형에서 채권의 가격을 결정하기 위한 채권가격편미분방정식을 유도하였다. 이 방정식으로부터, 지수함수에 대한 매클로린 급수와 적률생성함수를 이용하여 채권 가격의 근사해를 구하였다. 채권 가격과 만기와의 관계를 곡선으로 표현하였고, 이 그래프를 통하여 변동성이 증가함에 따라 채권 가격이 감소됨을 확인하였고, 만기 시점이 길어짐에 따라 무이표채의 현재가치가 낮아짐을 알 수 있었다. 또한, 이 곡선의 기울기가 음이라는 것은 무이표채의 현재가치와 만기는 역관계를 갖는다는 것을 의미하고, 곡선의 기울기가 급격하다는 것은 채권 가격 대비 만기의 민감도가 크다는 것을 의미한다. 더불어 몬테 카르로 시뮬레이션 기법을 이용하여 채권의 가격을 결정하기 위한 알고리즘을 제안하고, 시뮬레이션 과정을 통하여 채권의 가격을 결정하였다.

수치적 분석을 이용한 채권 가격의 근사해와 제안한 알고리즘을 이용하여 얻은 채권 가격의 결과를 비교하기 위하여, 근사해의 값과 몬테 카르로 시뮬레이션 값의 비율인 상대오차를 얻었다. 이로부터 얻은 RE가 약 2.2%보다 작음을 확인할 수 있고, 이것은 수치적 분석뿐만 아니라 제안한 알고리즘을 이용해도 채권의 가격을 매우 정확하게 예측되었는지 알 수 있었다. 또한, 지수함수에 대한 매클로린 급수를 이용하여 얻은 채권 가격의 근사해가 적률생성함수를 적용하여 구한 채권 가격의 근사해보다 상대적으로 오차가 작다는 것을 알 수 있었다.

본 논문에서는 우리나라 이자율 기간구조에 대한 연구가 부족한 상황에서 보다 합리적인 이자율 기간구조의 표준모형을 정하는데 유용한 정보를 제공하였다. 추후에 일반적인 경우에 적용할 수 있는 이자율 기간구조 모형의 연구가 더 필요하고, 채권 옵션 가격결정을 결정하는 연구로 확장할 수 있다. 본 연구에서 제시한 방법은 가격 결정과 비슷한 변동성을 가지고 있는 다양한 금융상품을 예측하는 데에도 활용할 수 있을 것으로 기대된다.

참고문헌(Reference)

[1] J-P. Renne, "A tractable interest rate model with explicit monetary policy rates," *European Journal of Operational Research*, Vol.251, No.3, pp.873-887,

2016. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.12.014>

[2] D. Hainaut, "A model for interest rates with clustering effects," *Quantitative Finance*, Vol.16, No.8, pp.1203-1218, 2016. <https://doi.org/10.1080/14697688.2015.1135251>

[3] T.S. Ho, S. Lee, "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims," *The Journal of Finance*, Vol.41, No.5, pp.1011-1028, 1986. <https://doi.org/10.2307/2328161>

[4] J. Hull, A. White, "Pricing Interest Rate Derivative Securities," *Review of Financial Studies*, Vol.3, No. 4, pp.573-592, 1990. <https://doi.org/10.1093/rfs/3.4.573>

[5] D. Heath, R. Jarrow and A. Morton, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, Vol.60, No.1, pp.77-105, 1992. <https://doi.org/10.2307/2951677>

[6] P. Ritchken, L. Sankarasubramanian, "Volatility Structures of Forward Rates and the Dynamics of the Term Structure," *Mathematical Finance*, Vol.5, No.1, pp.55-72, 1995. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9965.1995.tb00101.x>

[7] O.A. Vasicek, "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, Vol.5, No.2, pp.177-188, 1977. [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(77\)90016-2](https://doi.org/10.1016/0304-405X(77)90016-2)

[8] M. Brennan, E. Schwartz, "A Continuous Time Approach to the Pricing of Interest Rates," *Journal of Banking and Finance*, Vol.3, No.2, pp.133-155, 1979. [https://doi.org/10.1016/0378-4266\(79\)90011-6](https://doi.org/10.1016/0378-4266(79)90011-6)

[9] J. Cox, J. Ingersoll, S. Ross, "A Theory of the Term Structure of Interest Rate," *Econometrica*, Vol.53, No.2, pp.385-407, 1985. <https://doi.org/10.2307/1911242>

[10] J. Hull and A. White, "Bond Option Pricing Based on a Model for the Evolution of Bond Prices," *Advances in Futures and Options Research* Vol.6, pp.1-13, 1993.

[11] X. Zhang, J. Xiong, Y. Shen, "Bond and option pricing for interest rate model with clustering effects," *Quantitative Finance*, Vol.18, No.6, pp 969-981, 2017. <https://doi.org/10.1080/14697688.2017.1388534>

[12] S Bhattarai, C J Neely, "An Analysis of the Literature

- on International Unconventional Monetary Policy,”
Journal of Economic Literature, Vol.60, No.2,
pp.527-597, 2022.
<https://doi.org/10.1257/jel.20201493>
- [13] R Greenwood, S Hanson, J C Stein, A Sunderam, “A
Quantity-Driven Theory of Term Premia and Exchange
Rates,” The Quarterly Journal of Economics, Vol.138,
No.4, pp.2327-2389, 2023.
<https://doi.org/10.1093/qje/qjad024>
- [14] C. Ahn, H. Thompson, “Jump-Diffusion Processes and
the Term Structure of Interest Rates,” Journal of
Finance, Vol.43, No.1, pp.155-174, 1998.
<https://doi.org/10.2307/2328329>
- [15] C. Peng and S. Olivier, “Linear-Quadratic Jump-
Diffusion Modeling,” Mathematical Finance, Vol.17,
No.4, pp.575-598, 2007.
<https://doi.org/10.1111/j.1467-9965.2007.00316.x>
- [16] R.C. Merton, “Option pricing when underlying stock
returns are discontinuous,” Journal of Financial
Economics, Vol.3, No.1-2, pp.125-144, 1976.
[https://doi.org/10.1016/0304-405X\(76\)90022-2](https://doi.org/10.1016/0304-405X(76)90022-2)
- [17] G. Lee, K. Park, “The Monte Carlo Simulation and
Algorithm on the Relationship Interest Rate Models
for the Pricing of Bond Options,” Journal of the Korea
Society for Simulation, Vol.28, No.3, pp.49-56, 2019.
<https://doi.org/10.9709/JKSS.2019.28.3.049>

● 저 자 소 개 ●



박 기 섭(Kisoeb Park)

1999년 한서대학교 수학과(이학사)

2001년 성균관대학교 대학원 수학과(이학석사)

2007년 성균관대학교 대학원 수학과(이학박사)

2010년 King's College London(영국) 학진해외포닥

2021년~현재 서울신학대학교 IT융합소프트웨어학과 교수

관심분야 : 빅데이터, 데이터분석 및 컴퓨터 시뮬레이션, 네트워크, 그래프 이론, 응용수학 etc.

E-mail : kisoeb@stu.ac.kr